Ответ на письмо-размышление
С.Я Бекшаева
«ИСААК, ТЫ ПРАВ
ИЛИ ИНТИМНАЯ СТОРОНА
ОДНОЙ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМУЛЫ»

Уважаемый Сергей Янович!

Да, действительно:

Согласно определению центра масс для произвольной механической системы

$$M\,r_c = \sum m_k r_k$$

Допуская возможность изменения масс точек системы, дифференцируем обе части по времени и получаем

$$M\,r_c + M\,r_c = \sum m_k r_k + \sum m_k r_k$$

откуда выражаем количество движения системы

$$Q = \sum m_k r_k = M\,r_c + M\,r_c - \sum m_k r_k = M\,v_c + M\,r_c - \sum m_k r_k$$

И делается вывод:

В статье количество движения вычисляется по неверной формуле

$$Q = M_1 v_{C1} + M_2 v_{C2} \qquad (1)$$

в которой отсутствует член $M_2\left(r_{C2} - r_{C1}\right)$

Что же предлагается взамен «неверной формулы» (1)?

Первый путь – добавить пропущенный член. Но этот путь не очень удобен, т.к. приходится иметь дело с несколько громоздкими выражениями, которые, впрочем, сворачиваются к довольно простому виду.

Вы уверены?
Не допускаете ли Вы здесь большую ошибку?
Мне казалось, их действительно надо привести к простому виду.
А Вы что делаете?

Второй путь – прямое вычисление количества движения движущейся дуги и твердого корпуса вместе со сконденсированной на нем материальной точкой.

А зачем тогда рассказывать об «интимных подробностях»?
Ваш «второй путь» совершенно не использует эти самые «интимные подробности».
Т.е не использует член $M_2\left(r_{C2} - r_{C1}\right)$, в отсутствии которого Вы меня обвиняли.
Вы просто взяли, и просуммировали отдельные импульсы компонентов без учета изменения масс компонентов!

$$Q'_x = -\rho R^2 \alpha \int_{\alpha}^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \rho R^2 \alpha \left(1 - \cos\alpha\right)$$

$$Q'_y = -\rho R^2 \alpha \int_{\alpha}^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = -\rho R^2 \alpha \sin\alpha$$

Замечательно!
Чтобы получить эти выражения, совсем не обязательно разглагольствовать о количестве движения тел переменной массы!
Эти выражения – первое, что приходит на ум, при попытке подсчитать импульс всей системы!

Давайте посмотрим, как сворачиваются «*несколько громоздкие выражения*», действительно к простому виду.

Как известно, центром масс материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор r_{cm} которой определяется равенством:

$$r_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{m} m_k r_k$$

В рассматриваемой задаче, масса всей системы $M = M_c + M_{1c}$

Для условий представленной задачи, соответствующие проекции координат центра масс всей системы на оси системы координат XOY, будут определяться, как:

$$x_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} m_k x_k}{\left(M_c + M_{1c}\right)} = \frac{M_c x_c(t) + \left(M_{1c} - M_1(t)\right)\left(x_c(t) + R\right) + M_1(t)\left(x_c(t) + x_1(t)\right)}{\left(M_c + M_{1c}\right)} \tag{2}$$

$$y_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} m_k y_k}{\left(M_c + M_{1c}\right)} = \frac{M_c y_c(t) + \left(M_{1c} - M_1(t)\right) y_c(t) + M_1(t)\left(y_c(t) + y_1(t)\right)}{\left(M_c + M_{1c}\right)} \tag{3}$$

, где: $x_c(t)$, $y_c(t)$ - координаты центра масс тела M_c

$x_1(t)$, $y_1(t)$ - координаты центра масс системы подвижных элементов $M_1(t)$ в подвижной системе координат $X'O'Y'$.

Количество движения системы, или импульс, определяется, как произведение массы всей системы, умноженной на скорость ее центра масс:

$$Q = M\,\frac{dr_{cm}}{dt} \tag{4}$$

Продифференцировав выражения (2), (3) и подставив в (4), с учетом:

$$M_1(t) = \frac{M_{1c}\,(2\pi - \alpha(t))}{2\pi}$$

, получим:

$$Q_x = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{d\,x_c(t)}{dt} + \left(x_1(t) - R\right)\frac{d\,M_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{d\,x_1(t)}{dt} \tag{5}$$

$$Q_y = \left(M_c + M_{1c}\right)\frac{d\,y_c(t)}{dt} + y_1(t)\frac{d\,M_1(t)}{dt} + M_1(t)\frac{d\,y_1(t)}{dt} \tag{6}$$

В соответствии с законом сохранения количества движения:

$$Q_x = 0$$

$$Q_y = 0$$

В общем случае, количество движения системы представляет собой сумму импульсов элементов системы.

В данном случае, можно записать:

$$Q_x = Q_{cx}(t) + Q_{1x}(t)$$
$$Q_y = Q_{cy}(t) + Q_{1y}(t)$$

, где: $Q_{cx}(t)$, $Q_{cy}(t)$ - соответствующие проекции импульса тела M_c с присоединяющимися частицами.

$Q_{1x}(t)$, $Q_{1y}(t)$ - проекции импульса системы подвижных элементов.

При неизменности импульса всей системы, импульсы компонентов системы имеют переменные значения, поскольку скорости и массы компонентов системы изменяются с течением времени.

Количество движения системы подвижных элементов можно представить как сумму элементарных импульсов: $Q_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i v_i$

Но в точке $\left[x'_{1end} = R, y'_{1end} = 0\right]$ один из этих элементов, обладающий импульсом $\Delta m_i\, v_i$ «теряет» его, отдавая телу M_c.

Частица, «теряющая» свой импульс, обладает линейной скоростью $u = w\,R$.

Существует теорема об изменении количества движения тела переменной массы.

$$\frac{dQ}{dt} = F^e - \frac{dm_1}{dt}u_1 + \frac{dm_2}{dt}u_2$$

где: F^e - главный вектор всех внешних сил, действующих на тело;

$\frac{dm_1}{dt}, \frac{dm_2}{dt}$ - скорости изменения массы;

u_1, u_2 - скорости центров масс соответственно отделяющихся и присоединяющихся частиц.

Используя уравнение Мещерского для системы подвижных элементов, «теряющей» частицы, мы можем записать:

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dm}{dt}(u - V_1) \tag{7}$$

,где: $(u - V_1)$ — относительная скорость отсоединяющихся частиц.

(«Абсолютная» скорость отсоединяющихся частиц: $(V_c + u)$);

V_1 - скорость центра масс системы подвижных элементов;

V_c - скорость центра масс тела M_c.

Для тела M_c с присоединяющимися частицами $\left(M_{1c} - M_1(t)\right)$ можно записать:

$$\frac{d\,Q_c}{dt} = +\frac{dm}{dt}u \tag{8}$$

,где: u — относительная скорость присоединяющихся частиц («Абсолютная» скорость присоединяющихся частиц: $(V_c + u)$)

Дифференцируя выражения (5),(6), и используя выражения (7),(8), получим:

$$\frac{dQ_x}{dt}=\left(M_c+M_{1c}\right)\frac{d^2x_c}{dt^2}+\frac{d\left(x_1-R\right)}{dt}\frac{dM_1(t)}{dt}+M_1(t)\frac{d^2x_1}{dt^2}=+\frac{dm}{dt}u-\frac{dm}{dt}\left(u-\frac{dx_1}{dt}\right) \qquad (9)$$

$$\frac{dQ_x}{dt}=\left(M_c+M_{1c}\right)\frac{d^2y_c}{dt^2}+\frac{dy_1}{dt}\frac{dM_1(t)}{dt}+M_1(t)\frac{d^2y_1}{dt^2}=+\frac{dm}{dt}u-\frac{dm}{dt}\left(u-\frac{dy_1}{dt}\right) \qquad (10)$$

Выражения (9) и (10) получены, считая мгновенный расход и приход масс элементов системы величиной постоянной:

$$\frac{dM}{dt}=const, \qquad \frac{d^2M}{dt^2}=0$$

После упрощения и решения уравнений (9) и (10)

$$\boxed{Q_x=\left(M_c+M_{1c}\right)\frac{dx_c(t)}{dt}-R\frac{dM_1(t)}{dt}+M_1(t)\frac{dx_1(t)}{dt}=0} \qquad (11)$$

$$\boxed{Q_y=\left(M_c+M_{1c}\right)\frac{dy_c(t)}{dt}+M_1(t)\frac{dy_1(t)}{dt}=0} \qquad (12)$$

Выражения (11) и (12) представляют собой условие выполнение закона сохранения импульса для данной конкретной задачи

И не такие выражения громоздкие.
И не так страшно. ☺

Выражения (11) и (12) и являются теми самыми выражениями, по которым произведен расчет в моей первой статье. («*неверная формула*» (1))
И именно эти выражения подтверждаются уравнениями Лагранжа.
И именно к результатам этих выражений приводит целочисленный расчет методом припасовывания, выполненный к графическому решению в статье «Нереактивное перемещение».

Учитывать перераспределение импульсов в системе мы просто обязаны!
Поскольку только этим перераспределением мы можем объяснить возникновение перемещения корпуса системы.
А так как масса корпуса, за исследуемый промежуток времени, увеличивается, то этот корпус просто не может двигаться по циклоиде.

А про аналогию, которая «*может пониматься по-разному*», хочу еще добавить.
Поступательное движение можно вообще рассматривать, как вращательное, с радиусом вращения, стремящимся к бесконечности, и угловой скоростью, стремящейся к нулю.
И дифференциальные уравнения, которые «*так похоже*» описывают поступательное и вращательное движения, станут не только «**похожими**» а прямо-таки «**родными**»!

Примечание, которое Вам так не понравилось, было задумано мною, только для того, чтобы написать следующие выражения:

Если: $$m_1r_1(t)+m_2r_2(t)=0$$

,то это совсем не означает, что и : $$m_1(t)r_1(t)+m_2(t)r_2(t)=0$$

Последнее выражение не может иметь явно выраженного нулевого результата.
Или: Последнее выражение может не иметь явно выраженного нулевого результата.

В заключение хочу обратить внимание на один технический момент, напрямую не связанный с законами природы. Если мы решаем математическую задачу отыскания некоторых функций, удовлетворяющих уравнению $Q=0$*, то при подстановке найденных функций в это уравнение оно должно выполняться. Иначе они по определению не будут решением задачи. В начале настоящей заметки установлена чисто математическая эквивалентность равенств и* $Q=0$ *и*
$\sum m_k\left(x_k^1-x_k^0\right)=\sum m_k\left(y_k^1-y_k^0\right)=\sum m_k\left(z_k^1-z_k^0\right)=0$.

Последние означают неподвижность центра масс системы, но математической стороны задачи это не касается. Если найденные нами функции описывают движение, при котором центр масс движется, то уравнение этими функциями не удовлетворяется! В математическом смысле основной вывод статьи С.В.Бутова означает, что из $Q=0$ *следует* $Q\neq 0$*. Естественно, такой результат обязан насторожить любого исследователя и побудить к поиску источника недоразумения.*

Я привел Вашу цитату.

А давайте, примем, что уж если вычислили $Q=0$, значит так оно и есть: $Q=0$.

Вычислили, потому что это условие стояло на старте и в процессе решения задачи.

В результате решения имеем: $r_{cm}\neq const$.

Почему-то **все** начинают дифференцировать этот «несчастный» r_{cm} по времени. (?)

В результате получают скорость. Эту скорость опять возвращают в начало рассуждений.

В результате $Q\neq 0$.

Нет уж!

Решили, что $Q=0$, значит так оно и есть: $Q=0$!

Решили, что кинетическая энергия равна нулю – значит она не изменилась!

Кажется, я ни разу не оговорился.
Мы имеем только изменение координат ЦМ.
Да, это изменение происходит за какой-то промежуток времени.
Да, мы можем продифференцировать это изменение по времени, и получить величину, подозрительно напоминающую скорость. С такой же размерностью m/s.

Но эта «скорость» не является мерой импульса и кинетической энергии.

То, что мы получим в результате дифференцирования – является **<u>только скоростью изменения координат ЦМ</u>** – и ничего более!
Как были импульс и энергия равны нулю (в нашей ИСО), так они и равны нулю на всем интервале перемещения!

Понятие «скорость», в действительности, несколько шире, чем мы привыкли понимать.
Что такое скорость? Производная по времени от изменяющихся координат. Совершенно верно!
Но в законах сохранения, используется совершенно другое понятие «скорости».
Скорость – есть мера кинетической энергии.
Скорость - есть величина, определяющая, наравне с массой, импульс тела (системы тел).

С уважением,
С.Бутов